

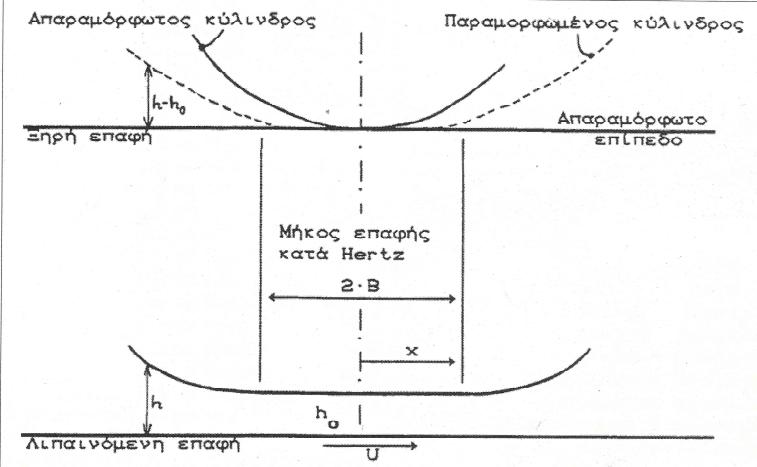
ΕΛΑΣΤΟΪΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΛΠΑΝΣΗ

Ποιοτική προσέγγιση του προβλήματος (*)

Γεώργιος Κ. Νίκας

(*) Το άρθρο βασίζεται στα στοιχεία της διπλωματικής εργασίας "Ελαστοϊδροδυναμική Λίπανση και Ελαχιστοπόνηση Διναμικής Καταπόνησης Μετωπικών Οδοντωτών Τροχών Ευθέων Οδόντων" του συν. Γεωργίου Κ. Νίκα. Η διπλωματική εργασία ολοκληρώθηκε το 1994 στον Τομέα Μηχανολογικών Κατασκευών και Αυτομάτων Ελέγχου του ΕΜΠ με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. Θ.Ν. Κωστόπουλο D.Sc. Σαν σημαντικό "προϊόν" της διπλωματικής εργασίας μπορεί να θεωρηθεί η παραγωγή λογισμικού για τη σχεδίαση ζειγμούς οδοντωτών τροχών βελτιστοποιημένη σχεδίασης από την άποψη της διναμικής καταπόνησης με θετικά αποτελέσματα δύον αφορά τον θόρυβο λειτουργίας και την διάρκεια ζωής.

Ο.Κ.



Σχήμα 1. Το μοντέλο του Grubin για την ελαστοδροδυναμική επαφή

Η ποιοτική ανάλυση του φαινομένου της λίπανσης μπορεί να οδηγήσει σε συμπεράσματα που -όπως αποδεικνύεται εκ των υστέρων- επιβεβαιώνονται στην πράξη από πειράματα αλλά και τις μαθηματικές μεθόδους επίλυσης του προβλήματος. Οι παλαιότερες και πιο επιτυχημένες περιγραφές ανήκουν στον Grubin (1949) και τον Poritsky (1952). Οι παρατηρήσεις τους είναι συνοπτικά οι εξής:

Από την ολοκλήρωση της εξίσωσης του Reynolds προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{dp}{dx} = 12 \cdot n \cdot u \cdot \frac{\rho \cdot h - (\rho \cdot h)_m}{\rho \cdot h^3}$$

όπου, n : μέση εφαπτομενική ταχύτητα, h : πάχος λιπαντικού και ο δείκτης της αναφέρεται στη θέση όπου η πίεση εμφανίζει ακρότατο όπως για παράδειγμα στη θέση της μέγιστης πλευρής. Τα φορτία που ασκού-

νται σε κλιαστικές περιπτώσεις ελαστοδροδυναμικής λίπανσης είναι τόσο μεγάλα (για παράδειγμα, φορτία της τάξης των 20 kPa δεν θεωρούνται μεγάλα), ώστε ο πλήρης διαχωρισμός των συνεργάζομένων επιφανεών από στρώμα λιπαντικού, που είναι αποδεδειγμένος πειραματικά, απαιτεί την ανάπτυξη τρεαστικής πάσεων (για παραδειγματικά πάσεις της τάξης των 4 GPa). Σε τόσο υψηλές όμως πάσεις, η συνεκτικότητα πολλών λιπαντικού είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική της τιμή p_0 . Δεδομένου ότι η πυκνότητα δεν μεταβάλλεται σημαντικά στην περιοχή ενδιαφέροντος (η μεταβολή μπορεί να φτάσει το 33%), αναμένεται ότι η διαφορά $(h-h_m)$ θα έχει πολύ μικρές τιμές⁽¹⁾, έτσι ώστε, πολλαπλασιαζόμενη με την πολύ μεγάλη τιμή της συνεκτικότητας, να οδηγεί σε ρεαλιστικές

τιμές της κλίσης της πίεσης dp/dx . Αυτό σημαίνει ότι το πάχος της λιπαντικής μεμβράνης στην περιοχή υψηλών πάσεων, δηλαδή γύρω από το σημείο $x=0$, είναι περίπου σταθερό: $h \approx h_m = h_0$.

Το εύρος της περιοχής υψηλών πάσεων είναι με ικανοποιητική προσέγγιση ίσο με το εύρος της περιοχής επαφής κατά Hertz (Έξης επαφή), δηλαδή είναι περίπου ίσο με $2 \cdot B$ ⁽²⁾. Ετσι τα όσα αναφέρθηκαν μέχρι εδώ μπορούν να συνοψισθούν στο σχήμα 1.

Η υπόθεση του σχεδόν σταθερού πάχους της λιπαντικής μεμβράνης στην περιοχή υψηλών φορτίσεων δε μπορεί να ισχύει στην έξοδο. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει με βάση τον ακόλουθο σύλλογισμό:

Στην περιοχή εισόδου, η πίεση αυξάνεται ώστε να αντισταθμίσει το αωκυνόμενο φορτίο. Η αρόδουσα στην περιοχή εξόδου, η πίεση πρέπει να μειώνεται, ώστε να επανέλθει τελικά, σε κάποια θέση $x=x_{out}$, στην ατμοσφαιρική της τιμή. Η μείωση όμως της πίεσης στην έξοδο συνεπάγεται προφανώς ότι η κλίση πίεσης έχει αρνητική τιμή, δηλαδή ότι $dp/dx < 0$. Άρα, από την εξίσωση του Reynolds, προκύπτει ότι στην έξοδο ισχύει: $h-h_m < 0 \Rightarrow h < h_m$. Θα πρέπει συνεπώς να εμφανίζεται μια στένωση της λιπαντικής μεμβράνης κοντά στην έξοδο. Η στένωση αυτή είναι με το "καρφί" πίε-

(1) Η πιο γνωστή εξίσωση που εκφράζει τη σχέση πυκνότητας λιπαντικού (ρ), πίεσης (p) και θερμοκρασίες για την περιπτώση ισοθερμοκρασιακής κατάστασης είναι αυτή των Dowson & Higginson. Αν αμεληθεύει η επιδραση της θερμότητας στην πυκνότητα γίνεται:

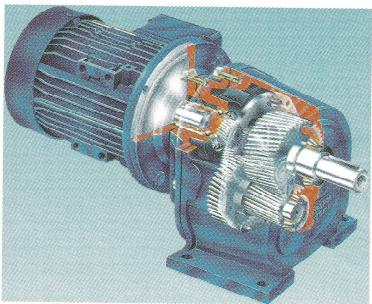
$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{6 \cdot 10^{-10} \cdot p}{1 + 1,7 \cdot 10^{-9} \cdot p} \right]$$

όπου ρ_0 η πυκνότητα του λιπαντικού σε ατμοσφαιρικές συνθήκες.

$$(2) \sqrt{\frac{BwR}{\pi E}}$$

όπου, w : φορτίο ανά μονάδα πλάτους, R : ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας και E : ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας.

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ



σης (pressure spike)- ένα από τα πλέον χαρακτηριστικά φαινόμενα που συναντώνται σε όλα τα προβλήματα λίπανσης με υψηλές φορτίσεις.

Μια άλλη σημαντική διαπίστωση αφορά την κατανομή πίεσης στη γειτονιά του σημείου $x=0$. Στην περίπτωση υψηλών φορτίων και κυρίως χαμηλών ταχυτήτων, το πάχος της λιπαντικής μεμβράνης είναι όπως αναμένεται αρχετά μικρό (πάχη της τάξης του 0.5 μμ είναι συνηθισμένα). Συγχρινόμενο μάλιστα με τις απόλυτες μεταποίσεις των συνεργαζομένων επιφανειών, το πάχος του λιπαντικού μπορεί να είναι τάξεις μεγέθους μικρότερο. Η πρατήρηση αυτή οδηγεί στο εξής συμπέρασμα: η κατανομή πίεσης στη γειτονιά της αρχής πρέπει να έχει τη μορφή της κατανομής πίεσης που προβλέπει η θεωρία του Hertz για ξηρές επιφάνειες, πρέπει δηλαδή να έχει τη γνωστή καθονοειδή μορφή. Με παρόμιο σύλλογο, συμπεράνουμε ότι στην περίπτωση χαμηλών φορτίων και υψηλών ταχυτήτων, το πάχος του λιπαντικού θα είναι "σημαντικό" ενώ οι ελαστικές παραμορφώσεις μικρές. Κατά συνέπεια, η κατανομή πίεσης αναμένεται να μοιάζει με αυτή που προκύπτει από την αντίστοιχη θεωρία των απαραμόρφων σωμάτων και/ή της σταθερής δινυμικής συνεκτικότητας.

Μέθοδοι επίλυσης και οι δυσκολίες που ανακύπτουν

Οι αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού των κατανομών πίεσης και πάχους της λιπαντικής μεμβράνης μπορούν σε γενικές γραμμές να ταξινομηθούν σε πέντε κατηγορίες. Στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων, οι εξισωτικές που περιγράφουν το πρόβλημα διακριτοποιούνται με χρήση περισσότερων διαφορών.

1. Ευθείες μέθοδοι (forward iterative methods)

Οι ευθείες μέθοδοι είναι οι απλούστερες και περισσότερο εύχρηστες στις σύγχρονη μεταξύ των περιπτώσεων. Ωστόσο, στην κλασική τους μορφή, είναι σπάνια χρησιμοποιούμενες πλέον εξαιτίας της αδυναμίας τους να καταλήξουν σε λύση σε περιπτώσεις υψη-

λών φορτίσεων αλλά και επειδή απαιτούν γενικά μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για την εξένδεση μιας ικανοποιητικής λύσης, ακόμα και σε περιπτώσεις σχετικά χαμηλών φορτίσεων.

Η αυτία της αποτυχίας των μεθόδων αυτής της κατηγορίας οφείλεται στην άμεση αλληλεξάρτηση της κατανομής του πάχους της λιπαντικής μεμβράνης και της κατανομής της πίεσης. Πλοι συγχεκούμενα, όπως εξηγήθηκε στην προηγούμενη ενότητα, το πάχος του λιπαντικού στη ζώνη υψηλών φορτίσεων είναι περίπου σταθερό. Μικρά σφάλματα υπολογισμού της πίεσης, τα οποία με τη σειρά τους, λόγω της ανατροφόδοτησης σε μια αριθμητική διαδικασία με βρόγχους επαναλήψεων, μπορούν να οδηγήσουν σε αστάθεια και τελικά σε απόκλιση. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να μέρει ν' αντιμετωπιστεί αν το πάχος του λιπαντικού εκφραστεί συναρτήσεις της πίεσης.

Με τον τρόπο αυτό μειώνεται σημαντικά η εξωρετική ευασθησία της εξίσωσης του Reynolds σε μικροτερούλες του πάχους του λιπαντικού και η αριθμητική διαδικασία καθίσταται περισσότερο ευσταθής και ταχύτερα συγχρίνουσα. Σε αντιστάθμισμα όμως αυτού του πλεονεκτήματος, υπάρχει ένα σημαντικό μειονέκτημα: ο αισιοδικός όγκος υπολογισμών είναι μεγάλος, ιδιαίτερα στηρ περιπτώση μεγάλου αιθμού υπολογιστικών σημείων.

2. Μέθοδοι Newton-Raphson

Οι μέθοδοι Newton-Raphson είναι ίσως οι περισσότερο πολύπλοκες αλλά ταυτόχρονα και οι συχνότερα πλέον χρησιμοποιούμενες επειδή διαθέτουν τα πλεονεκτήματα της ευστάθειας και της ταχείας σύγκλισης στις δύσκολες περιπτώσεις των υψηλών φορτίσεων. Το βασικό μειονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι ο αινιχημένος όγκος υπολογισμών (για παράδειγμα, ένας υπολογιστής VAX 11/750 θα χρειαζόταν περίπου 44 μέρες αν εφάρμοζε την κλασική μέθοδο Newton-Raphson με 1920 σημεία!).

3. Μέθοδοι multigrid

Οι μέθοδοι αυτές είναι οι σχετικά πιο πρόπτερες (παρουσιάστηκαν το 1970 από τον Brandt). Διαλέγοντας το πλεονέκτημα του σημαντικά μικρότερου χρόνου επίλυσης που επιτυγχάνεται μέσω επίλυσης μεγάλου μέρους του προβλήματος σε πλέγματα με πλήθος κομβών μικρότερο από τον αρχικά καθορισθέντα (και απαιτούμενο με βάση άλλες μεθόδους). Τα προηγούμενα επιτυγχάνονται χωρίς απώλεια αριθμείας και μπορούν να εφαρμοστούν και σε μη γραμμικές εξισώσεις, όπως είναι η εξίσωση του Reynolds. Αναλυτικά στοιχεία μπορούν να βρεθούν στις εργασίες του πρωτοπόρου στο έργο Brandt όπως η ακόλουθη:

Brandt A. (1977): "Multi-level Adap-

tive Solutions to Boundary - Value Problems", Math. of Comp., vol. 31, No. 138, σελ. 333.

Αναλυτικά και σαφή στοιχεία μαζί με έτοιμα προγράμματα περιέχοντα επίσης στο βιβλίο: "Numerical Recipes in FORTRAN", second edition, ενότητα 19.6, και ιδιαίτερα στη σελίδα 874 όπου περιγράφεται ο αλγόριθμος FAS για την επίλυση μη γραμμικών ελλειπτικών εξισώσεων.

4. Αντιστροφες μέθοδοι

Ο κυριότερος εκπρόσωπος της κατηγορίας αυτής είναι η κλασική πλέον εργασία των D. Dowson και G.R. Higginson (1959): "A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem", J. Mech. Eng. Sci., vol. 1, No 2, σελ. 6. Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιήθηκαν για να επιτευχθεί σύγκλιση στη ζώνη υψηλών φορτίων όπου οι μέχρι τότε ευθείες μέθοδοι αποτύγχαναν ή απαιτούσαν μεγάλους αιθμούς επαναλήψεων. Ονομάστηκαν αντιστροφες εξαιτίας της επίλυσης της εξίσωσης του Reynolds ως προς το πάχος ή του λιπαντικού. Επειδή το βασικό πλεονέκτημα τους είναι πλέον κοινό χαρακτηριστικό των σύγχρονων ευέλικτων μεθόδων, οι μέθοδοι αυτές έχουν εκλείψει.

5. Άλλες μέθοδοι

Εκτός από τις προηγούμενες μεθόδους, υπάρχουν και άλλες που συναντώνται σπάνια ή βρίσκονται σε εξέλιξη.

Για παραδείγμα, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορες εφαρμογές αλλά ενέχει το μειονέκτημα του μεγάλου υπολογιστικού κόστους. Επίσης οι τεχνικές επίλυσης υλοπληρωτικού - διαφορικών εξισώσεων έχουν μέχρι σήμερα ελάχιστα χρησιμοποιηθεί καθώς η θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι ένα δύσκολο κοινάτι των μαθηματικών πολλών τα τελευταία χρόνια έχει αρχίσει να εξελίνεται, κυρίως σε επίπεδο αιθμητικών μεθόδων. Η γνωστότερη από τις παλαιότερες εργασίες που εφάρμοσαν τεχνικές ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι η εργασία του Herrebrugh (1968):

Herrebrugh, K.: "Solving the incompressible and isothermal problem in elastohydrodynamic lubrication through an integral equation", journal of Lubrication Technology, Transactions of the ASME, Series F. 90, σελ. 262.

Τέλος, κατά καιρούς χρησιμοποιείται σε διάφορες εργασίες η τεχνική των διαταραχών (perturbations). Για παραδείγμα από την εύκολα ευρισκόμενη λύση του προβλήματος για σταθερή δυναμική συνεκτικότητα, μπορεί να προκύψει τελικά η λύση του γενικότερου προβλήματος με μεταβλητή - σε σχέση με την πίεση και τη θερμοκρασία συνεκτικότητα, μέσω κατάλληλων διαταραχών άλλων παραμέτρων.